§3. Binomické rovnice

Pozn.: Nechť $a \in \mathbf{R}; \sqrt[n]{a}$ v reálném oboru (pokud existuje) je jediné číslo x s vlastností $x^n = a$.
Tzn. v $\mathbf{R}$ $\exists$ nejvýše jedna $\sqrt[n]{a}$. V množině $\mathbf{C}$ je situace jiná.

Def.: Binomickou rovnicí s neznámou $z \in \mathbf{C}$ nazýváme každou rovnici tvaru $z^n = a$, kde $a \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
Každý komplexní kořen binomické rovnice nazýváme komplexní n-tou odmocninou z čísla a.

Pozn.: Při řešení binomických rovnic (s využitím goniometrického tvaru komplexních čísel) jde tedy i o řešení následujícího problému:
Určit všechna $x \in \mathbf{R}$: $(\cos x + i \sin x)^n = (\cos nx + i \sin nx) = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Musí platit: $nx = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$

Je zřejmé, že pro $k \in \{0,1,...,n-1\}$ získáváme argumenty různých komplexních čísel.

Pro $k = n + h, h \in \mathbf{N}_0 : x_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(n+h)\pi}{n} = \underbrace{\frac{\alpha + 2h\pi}{n}}_{x_h} + 2\pi$

$\Rightarrow x_h$ a x_k se liší o 2π, proto jsou to argumenty téhož čísla.

Podobně pro případ $k = n + h, h \in \mathbf{Z}^-$.

V.3.1.: Nechť $a \in \mathbf{C}$, pak binomická rovnice $z^n = a$ má v množině $\mathbf{C}$:
a) $a = 0 \Rightarrow 1$ kořen

b) $a \neq 0 \Rightarrow$ právě n kořenů $z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n})$, kde $k \in \{0;1;...;n-1\}, \alpha$ - argument komplexního čísla a

Pozn.: Obrazy kořenů binomické rovnice $z^n = a, n \geq 3$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$, neboť rozdíl dvou „sousedních“ kořenů je konstantní:
$x_{i+1} - x_i = \frac{\alpha + 2(i+1)\pi}{n} - \frac{\alpha + 2i\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$.

§4. Kvadratické rovnice v C

A) Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Pozn.: S kvadratickou rovnicí s reálnými koeficienty a reálnou neznámou jsme se seznámili ve IV. kapitole.

Pozn.: Nechť $a \in \mathbf{R}$. Binomická rovnice $z^2 = -a^2; a \neq 0$ má podle V.3.1. v množině **C** právě 2 kořeny $z_1 = a \cdot i; z_2 = -a \cdot i$.

Def.: Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou $z \in \mathbf{C}$ a reálnými koeficienty a,b,c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a,b,c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

Pozn.: Kvadratickou rovnici $az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$ řešíme doplněním na čtverec:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Označme $D = b^2 - 4ac$: $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$

1) $D > 0 \Rightarrow \exists\sqrt{D} \in \mathbf{R} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $D = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow z_{1,} = z_2 = -\frac{b}{2a}$

3) $D < 0 \Rightarrow$ označme $t = z + \frac{b}{2a}$

$$t^2 = \frac{-|D|}{4a^2} \Rightarrow t^2 = -\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\right)^2 \Rightarrow t_1 = i \cdot \frac{\sqrt{|D|}}{2a}; t_2 = -i \cdot \frac{\sqrt{|D|}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

V.4.1.: Nechť $az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$ $(*)$ je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a nechť $D = b^2 - 4ac$ je její diskriminant. Pak platí:

1) $D > 0 \Rightarrow (*)$ má 2 různé reálné kořeny $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $D = 0 \Rightarrow (*)$ má 1 reálný dvojnásobný kořen $z_{1,} = z_2 = \frac{-b}{2a}$

3) $D < 0 \Rightarrow (*)$ má 2 komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

B) Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Def.: Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou $z \in \mathbf{C}$ a komplexními koeficienty a,b,c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a,b,c \in \mathbf{C}, a \neq 0$.

V.4.2.: Každá kvadratická rovnice s komplexními koeficienty má v množině komplexních čísel právě dva kořeny, počítáme-li dvojnásobný kořen za dva.

§5. Algebraické rovnice (2. část)

Pozn.: S algebraickými rovnicemi s jednou neznámou $x \in \mathbf{R}$ jsme se seznámili v 1. ročníku ve IV. kapitole. Nyní si rozšíříme neznámou na $z \in \mathbf{C}$ a probereme další typy algebraických rovnic.

Def.: Algebraickou rovnicí (polynomickou rovnicí) *n*-tého stupně s jednou neznámou $z \in \mathbf{C}$ nazýváme každou rovnici tvaru P(*z*) = 0, kde P(*z*) je polynom *n*-tého stupně s reálnými (resp. komplexními) koeficienty.

V.5.1.: Každý polynom *n*-tého stupně $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$ lze rozložit na součin lineárních kořenových činitelů $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$,
kde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jsou kořeny polynomu P(*z*).
[Dk.:]

Pozn.: Vyskytuje-li se v rozkladu v předchozí větě některý činitel $z - z_i$ $(i \in \{1,2,\ldots,n\})$ právě *k*-krát, nazývá se kořen z_i *k*-násobným kořenem polynomu P(*z*).

V.5.2.: Základní věta algebry:
Každý polynom (algebraická rovnice) *n*-tého stupně s komplexními koeficienty má v množině **C** právě *n* kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.
[Dk.:]

V.5.3.: Má-li algebraická rovnice s reálnými koeficietny imaginární kořen $x + yi$, má také kořen $x - yi$ (číslo komplexně sdružené).
[Dk.:]

Pozn.: Binomické rovnice (§3) a kvadratické rovnice (§4) jsou speciální případy algebraických rovnic. Také reciproké rovnice (IV.kap. §20) jsou jejími speciálními případy. Řešení je detailně popsáno v tomto paragrafu, ale nyní můžeme navíc určit dvojice komplexně sdružených kořenů, neboť reciproká rovnice má vždy reálné koeficienty.
Dalším speciálním případem algebraických rovnic jsou trinomické rovnice.

Def.: Trinomickou rovnicí s neznámou $z \in \mathbf{C}$ a reálnými koeficienty $a, b, c \in \mathbf{R}$ nazýváme rovnici tvaru: $az^p + bz^q + c = 0$, kde $p, q \in \mathbf{N}, p > q, a \neq 0, b \neq 0$.

Pozn.: Trinomická rovnice je speciální případ rovnice algebraické.
Název je analogický názvu binomická rovnice, neboť binomickou rovnici můžeme definovat ve tvaru $az^n + c = 0$ (my jsme ji definovali ve tvaru $z^n = a$).

Pozn.: Ukážeme řešení pouze dvou typů trinomických rovnic:
1) $c = 0$: $az^p + bz^q = 0$
$z^q (az^{p-q} + b) = 0 \rightarrow z^q = 0 \Rightarrow$ *q*-násobný kořen 0, ostatních *p*-*q* kořenů získáme řešením binomické rovnice $az^{p-q} + b = 0$
2) $p = 2q$: $az^p + bz^q + c = 0 \Rightarrow$ substituce $t = z^q$
$\Rightarrow at^2 + bt + c = 0$
Všech $2q$ kořenů získáme řešením rovnice $t_{1,2} = z^q$.

§6. Využití komplexních čísel

Př.: